2°/ $g(x)=f(x)-x$. Etudions les variations de g.

g est dérivable sur $[0,1]$, $\forall x\in[0,1]$, $g'(x)=f'(x)-1$

or $\forall x\in[0,1]$, $f'(x)\le\frac{2}{3}\Rightarrow f'(x)-1\le-\frac{1}{3}$ donc

$\forall x\in[0,1]$, $g'(x)<0$.

g est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ donc g est une bijection de $[0,1]$ sur $g([0,1])=[g(1),g(0)]=[\frac{e}{3}-1,\frac{1}{2}]$ d'où 0 admet un seul antécédent $a\in[0,1]$ par g.

Conclusion : L'équation $f(x)=x$ admet une seule solution $a\in[0,1]$.

3°/a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbf{N}$, $0\le U_n\le 1$

• pour $n=0$, $U_0=\frac{1}{2}\Rightarrow 0\le U_0\le 1$

• supposons que pour un entier donné n, $0\le U_n\le 1$ et montrons que $0\le U_{n+1}\le 1$. On a : $0\le U_n\le 1\Rightarrow f(0)\le f(U_n)\le f(1)$ car f est strictement croissante sur $[0,1]$.

$f(0)=\frac{1}{2}>0$ et $f(U_n)=U_{n+1}$ et $f(1)=\frac{e}{3}<1$ d'où $0\le U_{n+1}\le 1$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbf{N}$, $0\le U_n\le 1$.

b) $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [0,1] \\ \forall x\in[0,1], |f'(x)|\le\frac{2}{3} \\ \forall n\in\mathbf{N}, U_n\in[0,1] \text{ et } a\in[0,1] \end{cases}$

donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$\forall n\in\mathbf{N}$, $|f(U_n)-f(a)|\le\frac{2}{3}|U_n-a|$

or $f(U_n)=U_{n+1}$ et $f(a)=a\Rightarrow|U_{n+1}-a|\le\frac{2}{3}|U_n-a|$

c) On a : $|U_1-a|\le\frac{2}{3}|U_0-a|$

$|U_2-a|\le\frac{2}{3}|U_1-a|\le(\frac{2}{3})^2|U_0-a|$